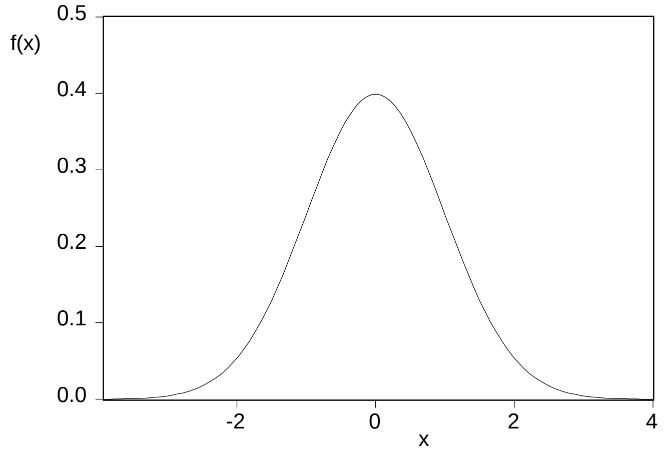
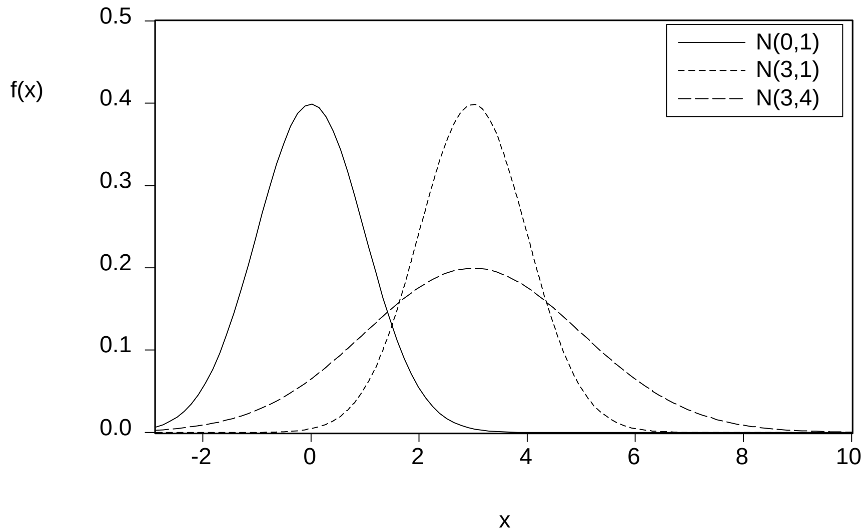
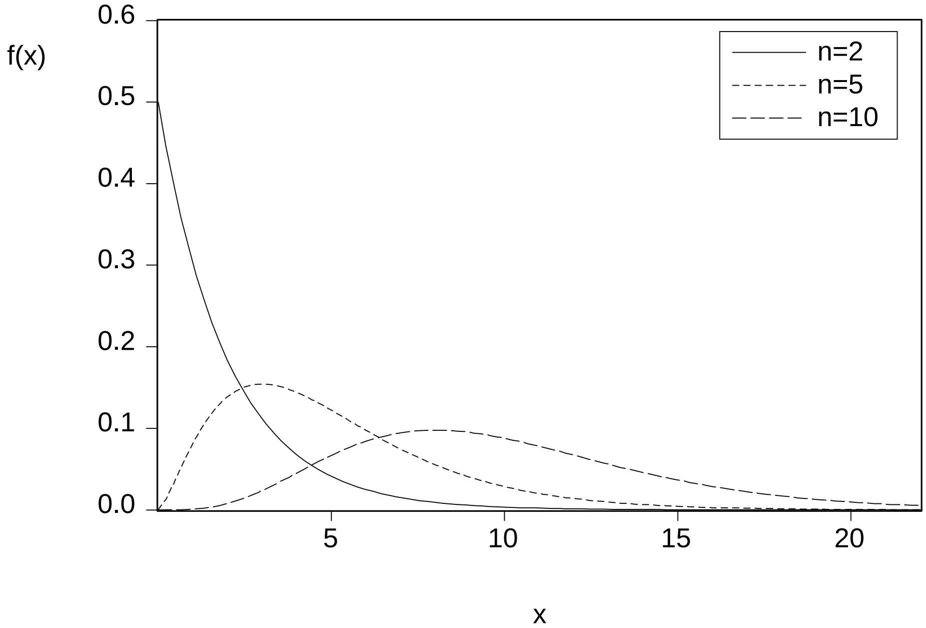
ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΤΥΠΙΚΗΣ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΤΑΝΟΜΗΣ



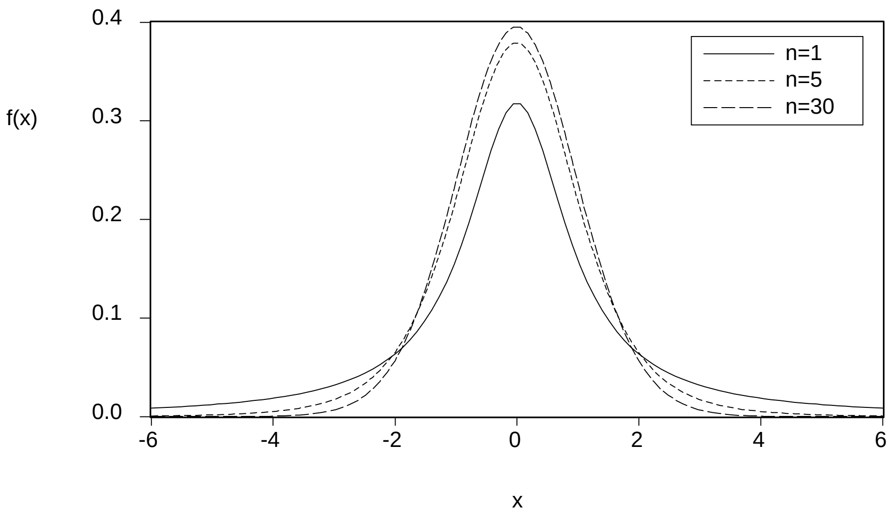
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ



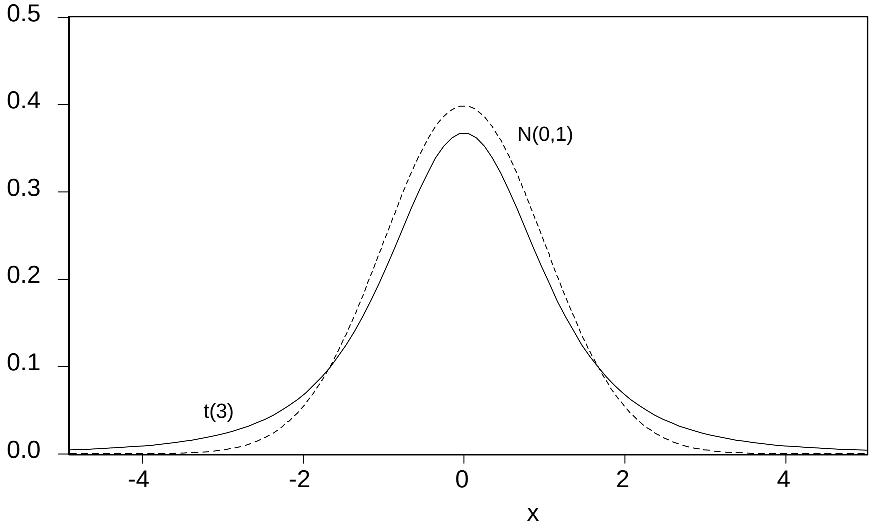
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ χ^2



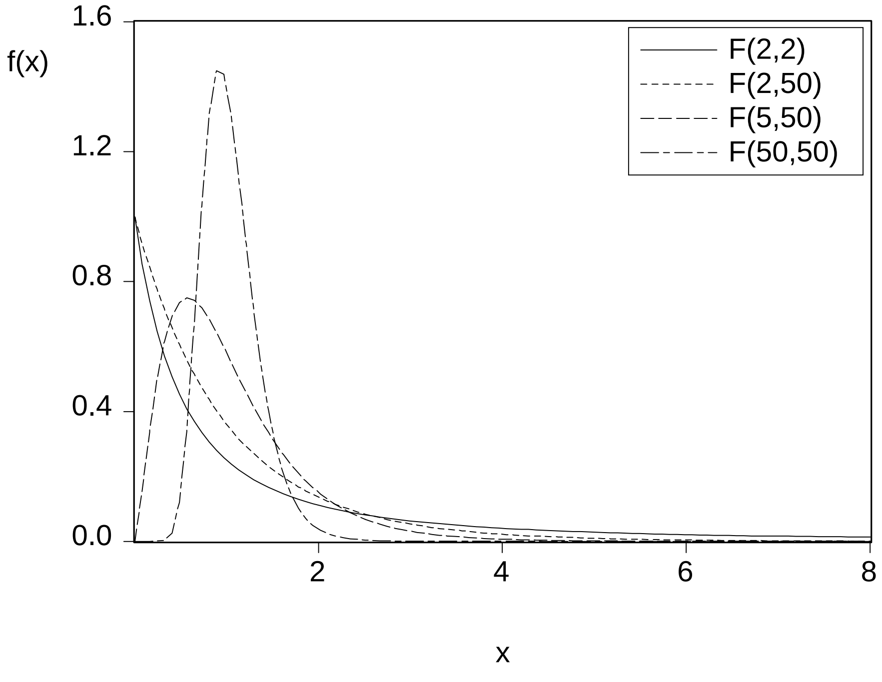
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ STUDENT-*t*



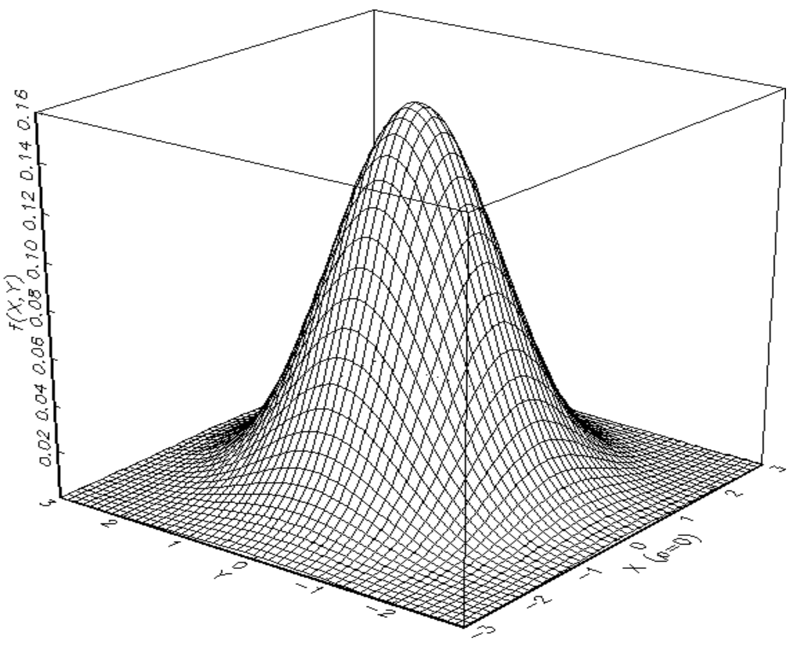
ΣΥΓΚΡΙΣΗ ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ ΚΑΝΟΝΙΚΗΣ ΚΑΙ STUDENT-*t*



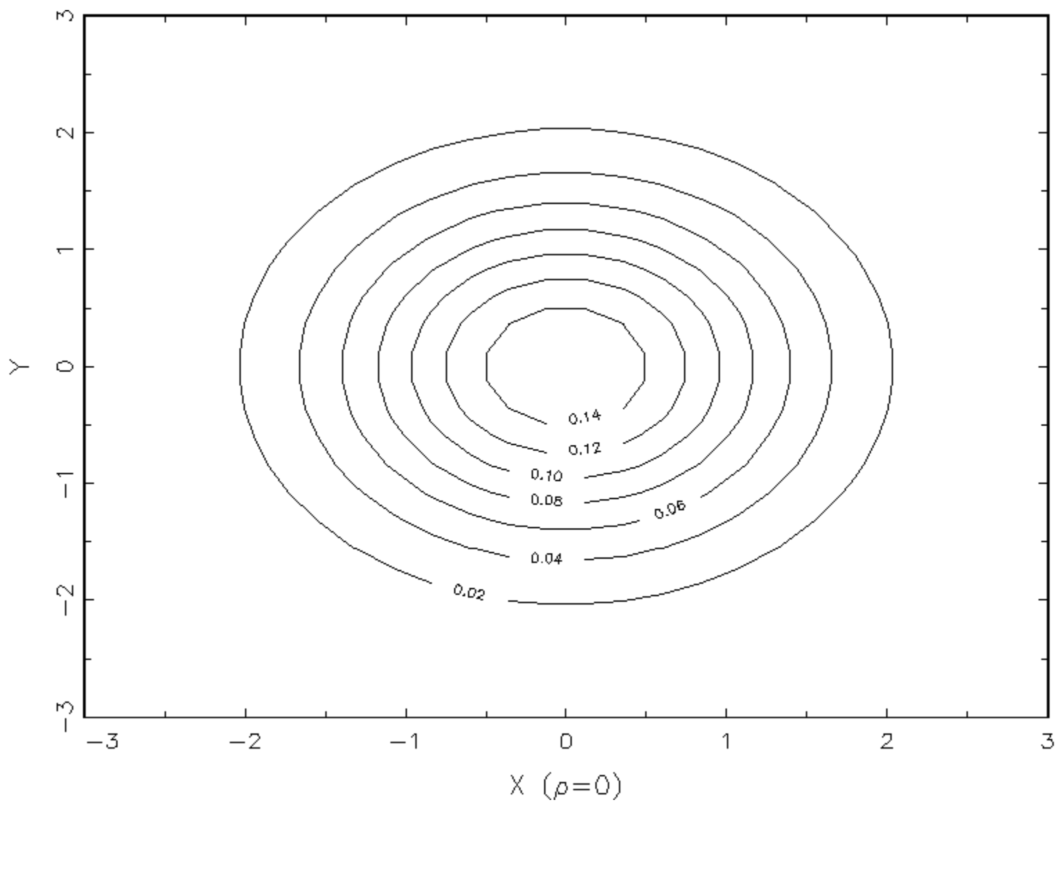
ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ ΔΙΑΦΟΡΩΝ F ΚΑΤΑΝΟΜΩΝ



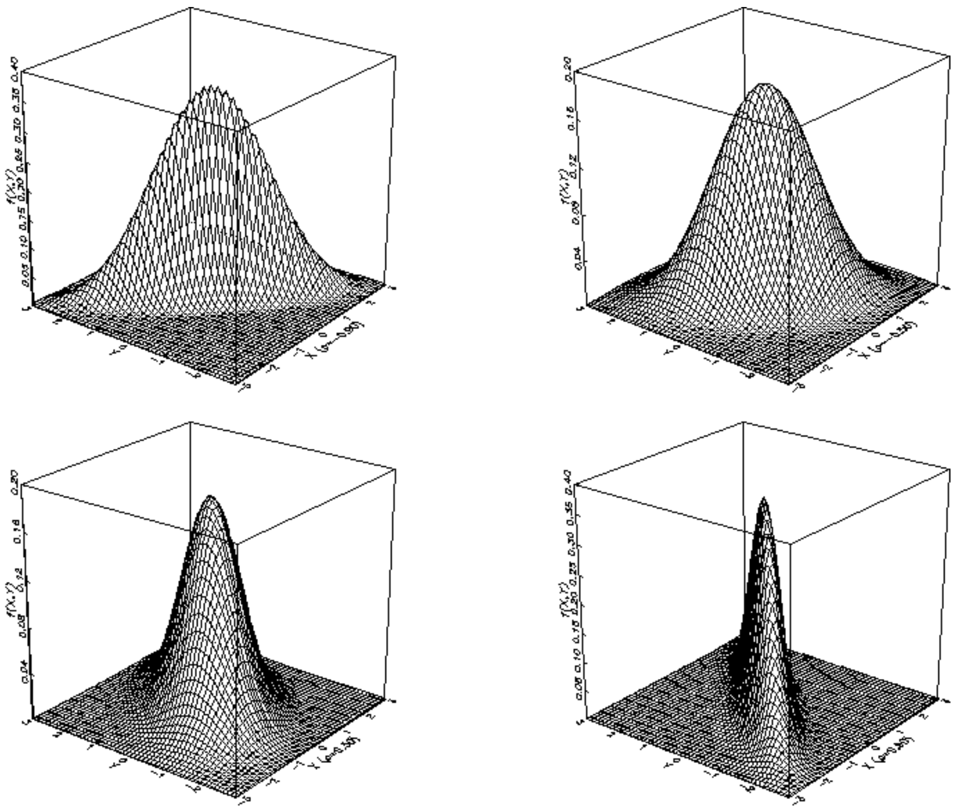
ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ, ρ=0



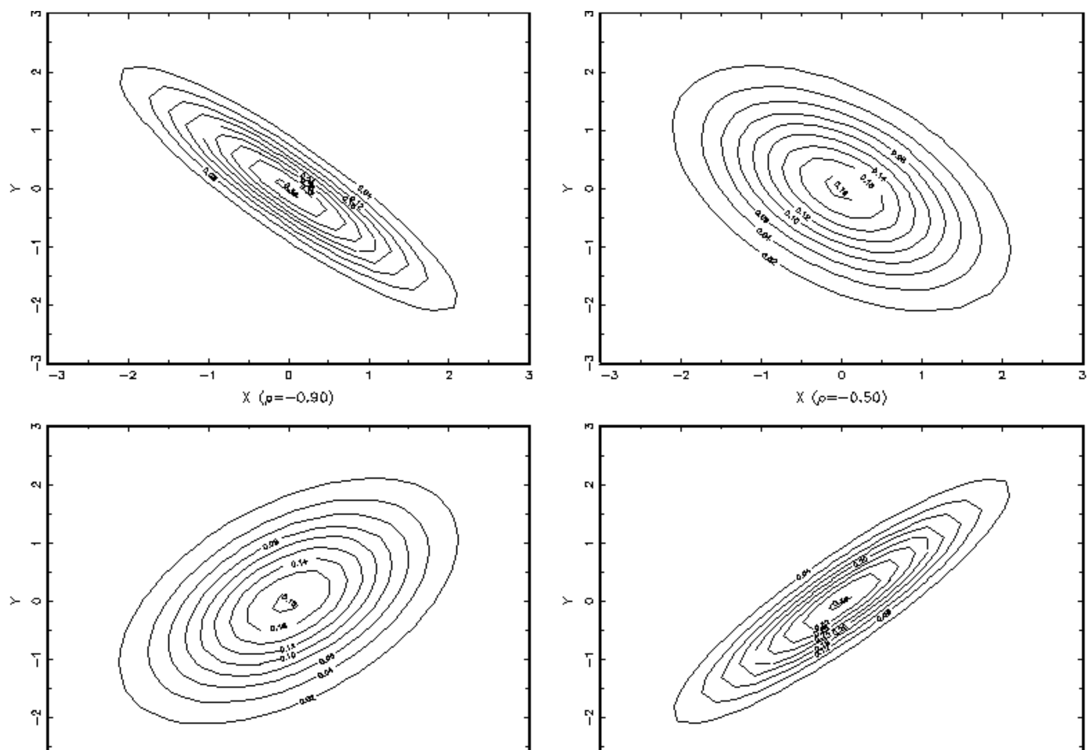
ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ, ρ=0



ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ ΠΥΚΝΟΤΗΤΑΣ



ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ ΚΑΝΟΝΙΚΕΣ ΙΣΟΣΤΑΘΜΙΚΕΣ



ΔΙΜΕΤΑΒΛΗΤΗ ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΚΑΤΑΝΟΜΗ

Η γενίκευση της κανονικής κατανομής $f(x) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right]$ στην περίπτωση που έχουμε δυο τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{X}$ και $\mathbf{Y}$ ονομάζεται διμεταβλητή κανονική κατανομή. Για τις δυο τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{X}$ και $\mathbf{Y}$ ας υποθέσουμε ότι έχουν μέσους μ_X και μ_Y, διακυμάνσεις σ_X^2 και σ_Y^2 και συνδιακύμανση $\sigma_{XY} = \rho\sigma_X\sigma_Y$ όπου ρ ο συντελεστής συσχέτισης των δυο μεταβλητών. Η συνάρτηση πυκνότητας της κατανομής είναι

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_X\sigma_Y\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left[-\frac{Q}{2(1-\rho^2)}\right]$$

όπου

$$Q = \left(\frac{x-\mu_X}{\sigma_X}\right)^2 - 2\rho\frac{(x-\mu_X)(y-\mu_Y)}{\sigma_X\sigma_Y} + \left(\frac{y-\mu_Y}{\sigma_Y}\right)^2$$

Στα επόμενα φαίνεται η συνάρτηση πυκνότητας μιας διμεταβλητής κανονικής κατανομής με μηδενικούς μέσους, μοναδιαίες διακυμάνσεις και μηδενικό συντελεστή συσχέτισης καθώς και οι ισοσταθμικές[1].
Μπορεί να αποδειχθεί ότι η κατανομή $f(\mathbf{Y}\,|\,\mathbf{X})$ είναι μονομεταβλητή κανονική με μέσο

$$E(\mathbf{Y}\,|\,\mathbf{X}) = \mu_Y + \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$$

και διακύμανση

$$Var(\mathbf{Y}\,|\,\mathbf{X}) = \sigma_Y^2(1-\rho^2)$$

Ο μέσος της κανονικής μπορεί να γραφεί ως

$$E(\mathbf{Y}\,|\,\mathbf{X}) = \left(\mu_Y - \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X\right) + \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}\cdot x = \alpha + \beta\cdot x$$

όπου $\alpha = \mu_Y - \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}\mu_X$ και $\beta = \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X}$

Η μέση τιμή $E(\mathbf{Y}\,|\,\mathbf{X})$ λέγεται και παλινδρόμηση της $\mathbf{Y}$ πάνω στην $\mathbf{X}$ και στην περίπτωση της διμεταβλητής κανονικής κατανομής αυτή είναι όπως φαίνεται γραμμική συνάρτηση της $\mathbf{X}$. Οι συντελεστές α και β αποτελούν γενίκευση των εκτιμητών ΜΕΤ στον πληθυσμό. Πραγματικά

[1] Μια ισοσταθμική δίνει όλα τα σημεία που έχουν την ίδια τιμή της συνάρτησης πιθανότητας. Δεν είναι πολύ διαφορετικές με τις καμπύλες αδιαφορίας της μικροοικονομικής θεωρίας που δίνουν όλα τα σημεία με το ίδιο επίπεδο ευημερίας, δηλαδή την ίδια τιμή της συνάρτησης χρησιμότητας.

$$\beta = \frac{\rho\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X\sigma_Y}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X} = \frac{\sigma_{XY}}{\sigma_X^2}$$

Εκτιμητές των ροπών σ_{XY} και σ_X^2 δίνονται από τις σχέσεις

$s_{XY} = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})\cdot(y_i - \bar{y})}{n-1}$ και $s_X^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n-1}$ οπότε ο εκτιμητής του β είναι απλώς το $\tilde{\beta}$, δηλαδή ο εκτιμητής ΜΕΤ. Επίσης θα έχουμε

$$\alpha = \mu_Y - \beta\mu_X$$

και ο εκτιμητής του α θα είναι $\alpha = \bar{y} - \tilde{\beta}\cdot\bar{x}$.

Η χρησιμότητα της διμεταβλητής κανονικής κατανομής βρίσκεται στο γεγονός ότι μας επιτρέπει να έχουμε το γραμμικό υπόδειγμα χωρίς να υποθέσουμε ότι η ερμηνευτική μεταβλητή $\mathbf{X}$ δεν είναι τυχαία μεταβλητή. Έτσι μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι μεταβλητές $\mathbf{X}$ και $\mathbf{Y}$ είναι και οι δυο τυχαίες μεταβλητές και ακολουθούν την διμεταβλητή κανονική κατανομή. Από τις προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι η παλινδρόμηση θα είναι γραμμική.